引き込み現象による集団的律動の発生 (Mathematical Topics in Biology)

AUTHOR(S):

蔵本, 由紀

数理解析研究所講究録
457巻 1982年 203-212

引き込み現象による集団的律動の発生

京大 基研 蔵本由紀

引き込み現象の摂動論的扱いを述べる。以下は、簡単な場合からはじめて、より複雑な場合へと進む。

[I] 周期外力を受けた1個の振動子

$$\dot{\underline{X}} = \underline{F}(\underline{X}) + \underline{p}(\omega_0 t),$$

$\underline{X}, \underline{F}, \underline{p}$ は n 次元ベクトル、 $\underline{p}(\omega_0 t) = \underline{p}(\omega_0 t + 2\pi)$.

更に、系は $\underline{p}=0$ においては線型安定な周期解 $\underline{X}_0(t) = \underline{X}_0(t+T)$ ($T = 2\pi/\omega$)をもつとする。対応する閉軌道をLとする。以下では $\underline{p}$ を小さな摂動として扱う。

L上に適当に位相 ϕ を導入し、非摂動周期解を

$$\dot{\phi} = \omega \quad (\mathrm{Mod.}\ 2\pi) \qquad (1)$$

と表示する。位相 ϕ の定義を、L を内部に含む細い管状の領域Gに拡張する(図1参照)。$\underline{p}$ が充分に小さければ、位相点は常にG内にあると考えて良い。

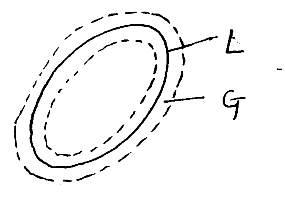

図1

$\phi(\underline{X})$ $(\underline{X} \in G)$ は非摂動系が常に(1)をみたすように定義される。非摂動系においては

$$\dot{\phi}(\underline{X}) = \mathrm{grad}_{\underline{X}}\,\phi \cdot \underline{F}(\underline{X})$$

であるから、

$$\mathrm{grad}_{\underline{X}}\,\phi\cdot\underline{F}(\underline{X}) = \omega$$

上のように位相を定義したとき、$n-1$ 次元の等位相面は isochron と呼ばれる。（図2参照）　摂動を受けた系における ϕ の運動は、

$$\dot{\phi} = \mathrm{grad}_{\underline{X}}\,\phi\cdot(\underline{F}(\underline{X}) + \underline{p}(\omega_0 t))$$
$$= \omega + \mathrm{grad}_{\underline{X}}\,\phi\cdot\underline{p}(\omega_0 t) \qquad (2)$$

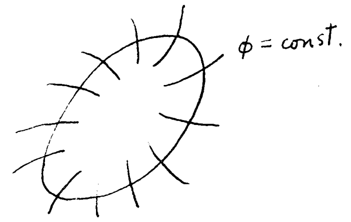

図2　isochrons

initial transient には興味がないので、以下は $t\to\infty$ のみ考える。すると、$\underline{p}\to 0$ では $\underline{X}\to\underline{X}_0\ (\in L)$ であるから、$\underline{p}$ の才1次近似では（(2)式に於て）$\mathrm{grad}_{\underline{X}}\,\phi \longrightarrow \mathrm{grad}_{\underline{X}_0(\phi)}\,\phi \equiv \underline{Z}(\phi) = \underline{Z}(\phi+2\pi)$ が許される。（$\mathrm{grad}_{\underline{X}_0(\phi)}\,\phi$ は $(\mathrm{grad}_{\underline{X}}\,\phi)_{\underline{X}=X_0(\phi)}$ の略記）　よって、

$$\dot{\phi} = \omega + \underline{Z}(\phi)\cdot\underline{p}(\omega_0 t).$$

$\phi = \omega_0 t + \psi$ とおけば

$$\dot{\psi} = \omega - \omega_0 + \underline{Z}(\omega_0 t + \psi)\cdot\underline{p}(\omega_0 t), \qquad (3)$$

$\omega - \omega_0 = O(|\underline{p}|)$ と仮定すると、ψ は slow variable、よって(3)を $t=0\sim T$ に亘って平均することが許され

$$\dot{\psi} = \omega - \omega_0 + \Gamma(\psi),$$
$$\Gamma(\psi) = \int_0^{2\pi}\underline{Z}(\lambda+\psi)\,\underline{p}(\lambda)\,d\lambda = \Gamma(\psi+2\pi)$$

$\omega - \omega_0 + \Gamma(\psi) = 0$ をみたす ψ が存在する場合にのみ系は外力に1対1に同期する（図3参照）。

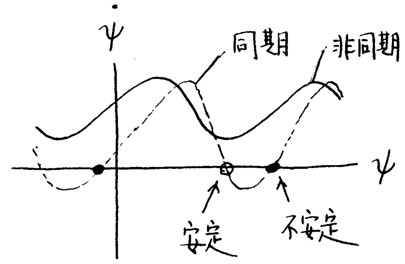

図3

[2] 異なる振動数をもつ2つの振動子の結合系

$$\dot{\underline{X}}_1 = \underline{F}(\underline{X}_1) + \underline{v}(\underline{X}_1, \underline{X}_2) + \underline{f}_1(\underline{X}_1),$$
$$\dot{\underline{X}}_2 = \underline{F}(\underline{X}_2) + \underline{v}(\underline{X}_2, \underline{X}_1) + \underline{f}_2(\underline{X}_2)$$

2つの振動子は同等に近く($|f_{1,2}|$：小)結合は弱い($|\underline{v}|$：小)とする。各振動子のn次元位相空間において、[1]と同様に位相ϕ_α ($\alpha=1,2$)を定義すると、

$$\dot{\phi}_1 = \mathrm{grad}_{\underline{X}}\,\phi \cdot (\underline{F}(\underline{X}_1) + \underline{v}(\underline{X}_1, \underline{X}_2) + \underline{f}_1(\underline{X}_1))$$
$$\simeq \omega + \underline{Z}(\phi_1)\underline{v}(\phi_1, \phi_2) + \underline{Z}(\phi_1)\cdot\underline{f}_1(\phi_1),$$

また振動子2についても類似の式を得る。但し、$\underline{v}(\phi_1, \phi_2)$ $\underline{f}_1(\phi_1)$は夫々 $\underline{v}(\underline{X}_1(\phi_1), \underline{X}_2(\phi_2))$, $\underline{f}_1(\underline{X}_1(\phi_1))$等の略記。$\phi_{1,2}=\omega t+\psi_{1,2}$により、[1]におけると同様の平均操作を行えば、

$$\dot{\psi}_1 = \Gamma(\psi_1 - \psi_2) + \Delta_1$$
$$\dot{\psi}_2 = \Gamma(\psi_2 - \psi_1) + \Delta_2 \qquad (4)$$

を得る。ここに、

$$\Gamma(\psi_\alpha - \psi_\beta) = \int_0^{2\pi} \underline{Z}(\lambda+\psi_\alpha)\underline{v}(\lambda+\psi_\alpha, \lambda+\psi_\beta)\,d\lambda,$$
$$\Delta_\alpha = \int_0^{2\pi} \underline{f}_\alpha(\lambda+\psi_\alpha)\,\underline{Z}(\lambda+\psi_\alpha)\,d\lambda.$$

更に $\psi_1 - \psi_2 = \psi$ とおけば

$$\dot{\psi} = \Delta_1 - \Delta_2 + \Gamma(\psi) + \Gamma(-\psi)$$

これより[1]の場合と同様に同期の条件が判る。但しこの場合は引力的同期と斥力的同期の場合にわかれる(図4参照)。

[3] 異なる振動数をもつ N (→∞)個の振動子の結合系

$$\dot{\underline{X}}_i = \underline{F}(\underline{X}_i) + \sum_j \underline{V}_{ij}(\underline{X}_i, \underline{X}_j) + \underline{f}_i(\underline{X}_i)$$

$$i = 1, 2, \cdots N$$

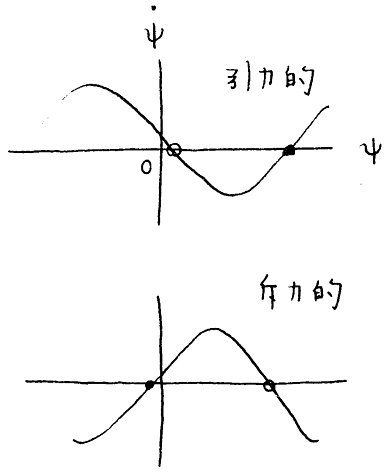

図 4

場合[2]の単純な拡張であるから、(4)に対応して次式を得る。

$$\dot{\psi}_i = \sum_j \Gamma_{ij}(\psi_i - \psi_j) + \Delta_i , \quad i = 1, 2, \cdots N \qquad (5)$$

上式は一般に解析的には解けないが、興味深い *soluble model* がある。すべての振動子が同等に相互作用するとし、周期関数 Γ_{ij} として最も簡単に次のものを仮定しよう。

$$\Gamma_{ij}(x) = -\frac{1}{N}\Gamma_0 \cdot \sin x$$

更に固有振動数 Δ_i の分布として Lorentzian

$$n(\Delta) = \frac{\gamma}{\pi} \frac{1}{(\Delta - \Delta_0)^2 + \gamma^2}$$

をとる。この場合には一種の相転移現象が起ることが示せる。重要なパラメタは

$$\eta \equiv 2\gamma / \Gamma_0$$

である。$\eta > 1$ においては振動子は互にばらばらに運動するが、$\eta < 1$ においては N 個の中の有限部分が相互同期的クラスターを作る。互に同期している振動子の個数を N_s とし、秩序度 σ を

$$\sigma = N_s / N$$

で定義すると、

$$\sigma = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \mathrm{Tan}^{-1} \frac{2\sqrt{1-\eta}}{\eta} & (\eta < 1) \\ 0 & (\eta > 1) \end{cases}$$

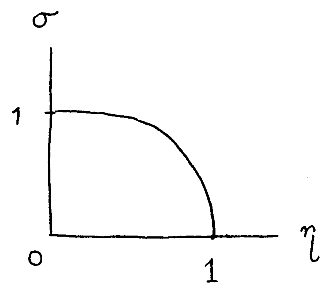

図 5

となる事が示せる（図5参照）.

また、各振動子の固有振動数 Δ_i は相互作用の結果 $\tilde{\Delta}_i$ に変化する。ここに、

$$\tilde{\Delta}_i = \begin{cases} \Delta_0 & (|\Delta_i - \Delta_0| < \Gamma_0 \sqrt{1-\eta}) \\ \Delta_0 + (\Delta_i - \Delta_0)\sqrt{1 - \frac{\Gamma_0^2 \cdot (1-\eta)}{(\Delta_i - \Delta_0)^2}} & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

$\tilde{\Delta}_i$ の分布関数 $f(\tilde{\Delta})$ は

$$f(\tilde{\Delta}) = \sigma\,\delta(\tilde{\Delta} - \Delta_0) + \frac{\gamma}{\pi} |\tilde{\Delta} - \Delta_0| \Big/ \{(\tilde{\Delta}-\Delta_0)^2 + \gamma^2 + \Gamma_0^2 \chi\} \sqrt{(\tilde{\Delta}-\Delta_0)^2 + \Gamma_0^2 \chi},$$

$$\chi \equiv \begin{cases} 1-\eta & (\eta < 1) \\ 0 & (\eta > 1) \end{cases}$$

となって、ordered state では Lorentzian と異なり、中央に δ 関数的ピークをもつとともに、その近傍で background は陥没する。（図6参照）

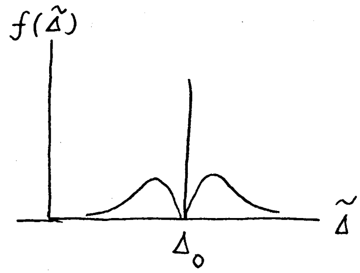

図 6

［4］ランダム力を受けた

1個の振動子

$$\underline{\dot{X}} = \underline{F}(\underline{X}) + \underline{f}(t)$$

今までと同様に

$$\dot{\phi} = grad_{\underline{X}}\,\phi \cdot (\underline{F}(\underline{X}) + \underline{f}(t))$$
$$= \omega + \underline{Z}(\phi)\cdot\underline{f}(t) \equiv \omega + g(\phi, t) \qquad (6)$$

は明らか。　ここでランダム力 g は弱い白色ガウス雑音であると仮定する。

$$\overline{g(\phi, t)} = 0,$$
$$\overline{g(\phi, t)\,g(\phi, t')} = 2D(\phi)\,\delta(t-t').$$

これより、"Langevin 方程式"(6)は Fokker-Planck 方程式に変換される。

$$\dot{P}(\phi) = -\frac{\partial}{\partial\phi}J,$$
$$J = \left\{\omega + \frac{1}{2}D'(\phi)\right\}P - \frac{\partial}{\partial\phi}\{D(\phi)P\}.$$

ここで、$\phi = \omega t + \psi$ とおけば、

$$\dot{P}(\psi) = -\frac{\partial}{\partial\psi}\tilde{J},$$
$$\tilde{J} = \frac{1}{2}D'(t+\psi)P - \frac{\partial}{\partial\psi}\{D(t+\psi)P\}.$$

$P(\psi)$ の時間変化は遅いから、上式に対して時間平均を行い

$$\dot{P}(\psi) = D\frac{\partial^2 P}{\partial\psi^2}$$

なる単純な拡散方程式を得る。　即ち、ランダム力により、振動の位相は単純に拡散する。

[5] ランダム力を受けた2つの同等な振動子の結合系

$$\dot{\underline{X}}_1 = \underline{F}(\underline{X}_1) + \underline{v}(\underline{X}_1, \underline{X}_2) + \underline{f}_1(t),$$
$$\dot{\underline{X}}_2 = \underline{F}(\underline{X}_2) + \underline{v}(\underline{X}_2, \underline{X}_1) + \underline{f}_2(t).$$

ランダム力の性質は[4]の場合と同じとする。 (7)式の単純な拡張として次式を得る。

$$\dot{P}(\psi_1, \psi_2) = -\frac{\partial}{\partial \psi_1}\{\Gamma(\psi_1-\psi_2)P\} - \frac{\partial}{\partial \psi_2}\{\Gamma(\psi_2-\psi_1)P\}$$
$$+ D\left(\frac{\partial^2}{\partial \psi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \psi_2^2}\right)P. \qquad (8)$$

$\psi_1 - \psi_2 = \psi$ とおけば

$$\dot{P}(\psi) = -\frac{\partial}{\partial \psi}\left[\{\Gamma(\psi) - \Gamma(-\psi)\}P\right] + 2D\frac{\partial^2 P}{\partial \psi^2}.$$

$D=0$ ならば、場合[3]において $\Delta_1 = \Delta_2$ とした時に一致し、$\Gamma = 0$ ならば、場合[4]に一致する。 上式は周期ポテンシャル中のブラウン運動を表わしており、従って2つの振動子の間に同期(又は位相のロッキング)が起ることはない。 しかし、以下に見るように、振動子の個数が∞になると相転移現象が起る。

[6] ランダム力を受けた $N(\to\infty)$ 個の同等な振動子の結合系

$$\dot{\underline{X}}_i = \underline{F}(\underline{X}_i) + \sum_j v_{ij}(\underline{X}_i, \underline{X}_j) + \underline{f}_i(t), \quad i=1,2,\cdots N$$

(8)式の一般化として直ちに次式を得る。

$$\dot{P}(\{\psi\}) = -\sum_i \frac{\partial}{\partial \psi_i}\left\{\sum_j \Gamma_{ij}(\psi_i - \psi_j)P\right\} + D\sum_i \frac{\partial^2 P}{\partial \psi_i^2}.$$

場合[3]と同様に、すべての振動子は同等に相互作用するという模型を考えよう。

$$\Gamma_{ij}(x) = \frac{1}{N}\Gamma(x).$$

力学変数として、位相ψ_iの代りに、θなる位相をもつような振動子の数密度 $\hat{n}(\theta)$ を導入する。

$$\hat{n}(\theta) = \sum_i \delta(\theta - \psi_i) .$$

$\hat{n}(\theta)$の統計平均

$$\langle \hat{n}(\theta) \rangle_t = \int_0^{2\pi} d\{\psi\}\, \hat{n}(\theta) P(\{\psi\}, t) \equiv n(\theta, t)$$

の時間発展は

$$\dot{n}(\theta) = -\frac{\partial}{\partial\theta}\int_0^{2\pi} d\theta' \, \Gamma(\theta-\theta') n(\theta') n(\theta) + D\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} n(\theta) \qquad (9)$$

によって正確に記述される。 上式の解は周期境界条件、

$n(\theta) = n(\theta + 2\pi)$ をみたさなければならない。 集団的律動の有無は、巨視的観測量

$$\underline{O}(t) \equiv \sum_i \underline{X}_i(t)$$

を通じて測られるとしよう。 上述の摂動論の枠内では、

$$\underline{O}(t) \simeq \sum_i \underline{X}_0(\phi_i(t))$$

$$= \sum_i \underline{X}_0(\omega t + \psi_i(t)) = \int \underline{X}_0(\omega t + \theta) n(\theta, t)\, d\theta$$

としてよいから、 (9)の解 $n(\theta, t)$ を通じて、集団的律動の有無を調べることができる。 2つの典型的な特解を考える。

(a) $n(\theta, t) = n_0 = N/2\pi$

明らかにこの一様な解は常に存在し、$O(t) = \mathrm{const.}$ を与えるので、集団的律動は存在しない。

(b) 伝播解 $n(\theta, t) = n(\theta - \Omega t)$ (図7参照)

この様な解が存在すると、

$$\underline{\mathcal{O}}(t) = \int \underline{X}_0(\omega t+\theta)\, n(\theta-\Omega t)\, d\theta$$
$$= \int \underline{X}_0((\omega+\Omega)t+\theta')\, n(\theta')\, d\theta'$$

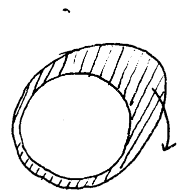

図7 リング状のθの空間を伝播する密度波

となって集団的律動が存在する。

パラメタDを小さくしてゆくと、最初は一様な解(a)が安定であるが、$D=D_c$において不安定化し、小振幅の伝播解(b)が分岐することが示せる。以下はその概略である。

$$n(\theta,t) = n_0 + \rho(\theta,t)$$

とおき、ρ, Γ をFourier展開する。

$$\rho(\theta,t) = \sum_m \rho_m e^{im\theta},$$
$$\Gamma(\theta) = \sum_m \Gamma_m e^{im\theta}.$$

$\{\rho_m\}$に対する無限次元の常微分方程式系

$$\dot{\rho}_l = \sigma_l \rho_l - il \sum_{m\neq 0,l} \Gamma_m \rho_m \rho_{l-m},$$
$$\sigma_l = \bar{\sigma}_{-l} = (l\Gamma_l'' - l^2 D) - il(1+\Gamma_0 - \Gamma_l')$$
$$(\ \Gamma_l' = \Gamma_{-l}',\ \Gamma_l'' = -\Gamma_{-l}''\ \text{に注意}\ )$$

が得られ、これより解(a)の線型安定性に関する臨界条件が判る。即ち

$$D_c \equiv Max\,(l^{-1}\Gamma_l'')$$

とすると、$D<D_c$では解(a)が不安定化する。$D=D_c$の近傍では、分岐解析により小振幅の伝播解が摂動的に求まり、

$$
\begin{aligned}
n(\theta, t) &\simeq U_\ell \exp[i(\ell\theta - \Omega t)], \\
|U_\ell|^2 &= (D_c - D)/S'', \\
\Omega - \Omega_c &= -(D_c - D)S''/S', \\
S = S' + iS'' &= -\frac{2\ell^2}{\sigma_{2\ell}}(|\Gamma_\ell|^2 + \Gamma_\ell \Gamma_{2\ell})
\end{aligned}
$$

となる。 但し ℓ は $\ell^{-1}\Gamma_\ell''$ を最大にする ℓ である。明らかに $D_c > 0$ でなければ分岐現象は生じない。$D_c > 0$ は振動子間の相互作用が引力的であることと等価である。また、$S'' > 0$ ならば正常分岐（normal bifurcation or supercritical bifurcation），$S'' < 0$ ならば逆分岐（inverted bifurcation or subcritical bifurcation）となる。

参考文献

(1) Y. Kuramoto (1975) Self-Entrainment of a Population of Coupled Nonlinear Oscillators. In Int. Symp. on Math. Prob. in Theor. Physics, H. Araki ed., Springer-Verlag, New York, Lecture Notes in Physics 39, 420-422.

(2) Y. Kuramoto (1981) Phythms and Turbulence in Populations of Chemical Oscillators. Physica 106A 128-143.